Ein Beitrag zur Theorie der charakteristischen Invarianten

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von

Feodor Theilheimer

aus Gunzenhausen

Tag der Promotion: 18. Juni 1936

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Januar 1936

Sonderabdruck aus der „Mathematischen Zeitschrift", Band 41

Verlag von Julius Springer in Berlin

1936

163

Referenten: Professor Dr. I. Schur

Professor Dr. E. Schmidt

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Der Gegenstand dieser Untersuchungen ist eine Aufgabe, die man kurz als Umkehrung des Invariantenproblems bezeichnen könnte. Dabei ist unter dem Invariantenproblem — im allgemeinsten Sinne — das folgende verstanden: Zu einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ von linearen homogenen Substitutionen sind solche Funktionen[1]) gesucht, die sich bei Ausführung einer Substitution aus $\mathfrak{G}$ nicht ändern[2]). Die umgekehrte Aufgabe wäre, zu einer gegebenen Funktion F diejenigen linearen homogenen Substitutionen aufzusuchen, die F invariant lassen. Wir behandeln hier dieses Problem in einer weniger allgemeinen Form und gehen nicht von einer beliebigen Funktion aus, sondern von einer Funktion I, die Invariante einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist und untersuchen, ob $\mathfrak{G}$ alle I invariant lassenden Substitutionen enthält; ist dies der Fall, so ist $\mathfrak{G}$ durch I eindeutig bestimmt; man nennt dann I eine charakteristische Invariante von $\mathfrak{G}$.

Die Gruppen, deren Invarianten wir hier untersuchen, sind aus der Formentheorie bekannt. Die Substitution, die die Koeffizienten A einer n-ären Form k-ten Grades $f(A, x)$ erfahren, wenn man auf die Veränderlichen x eine lineare homogene Transformation ausübt, wird als die durch die x-Transformation „induzierte“ bezeichnet. Unter einer Invariante der Form $f(A, x)$ versteht man bekanntlich eine Funktion der A, die gegenüber induzierten Substitutionen invariant bleibt. Man bezeichnet daher eine Invariante $I(A)$ der Form $f(A, x)$ als eine charakteristische Invariante dieser Form, wenn es neben den induzierten Substitutionen keine weiteren linearen homogenen Substitutionen gibt, die $I(A)$ invariant lassen.

---

[1]) Unter Funktion bzw. Invariante ist hier stets eine ganze rationale homogene Funktion bzw. Invariante verstanden.

[2]) Abgesehen von einem Faktor, der nicht von den Veränderlichen der Funktion, sondern nur von der Substitution abhängt.

Für binäre Formen haben bereits die Herren Ostrowski und Schur[3]) gezeigt, daß — bis auf gewisse Ausnahmen[4]) — sämtliche Invarianten charakteristische Invarianten sind, nachdem vorher schon Herr Ostrowski dies für die Diskriminanten nachgewiesen hat[5]).

Hier sollen hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß eine Invariante einer n-ären Form eine charakteristische Invariante ist, und dann soll gezeigt werden, daß sämtliche Invarianten der ternären kubischen Form diesen Bedingungen genügen und somit charakteristische Invarianten sind.

I. Hinreichende Bedingungen für charakteristische Invarianten.

§ 1.

Wir gehen von einer n-ären Form k-ten Grades aus:

$$(1) \qquad f(A, x) = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Substituiert man

$$(2) \qquad x_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} g_{\lambda\varkappa} \overline{x}_\lambda, \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, n$$

oder, wie wir kurz schreiben, $x = g'(\overline{x})$, wobei g' die Transponierte der Matrix $g = (g_{\varkappa\lambda})$ bedeutet[6]), dann wird $f(A, x)$ gleich einer Form $f(\overline{A}, \overline{x})$ in den neuen Veränderlichen $\overline{x}$ mit neuen Koeffizienten $\overline{A}$:

$$f(\overline{A}, \overline{x}) = \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = k} \frac{k!}{\beta_1! \ldots \beta_n!} \overline{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n} \overline{x}_1^{\beta_n} \ldots \overline{x}_n^{\beta_n},$$

wobei die $\overline{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ aus den $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ durch die durch (2) induzierte Substitution hervorgegangen sind. Wir schreiben $\overline{A} = G(A)$ und dabei besteht bekanntlich zwischen g und G folgender Zusammenhang: Wendet man auf

---

[3]) „Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form." Math. Zeitschr. **15** (1922) S. 81—105. Einen weiteren Beweis desselben Satzes lieferte Herr Ostrowski im Jahresbericht der D. M. V. **33** (1925), S. 174—184.

[4]) Ausnahmen bilden nur die Potenzen der quadratischen Invariante der Formen vom Grade k, für $k = 2m$ und $m > 1$.

[5]) „Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten und Resultanten binärer Formen." Math. Annalen **79**, S. 360—387. Diese Arbeit enthält S. 385 einen weiteren Beweis des Frobeniusschen Satzes über die allgemeinsten linearen Transformationen, die eine allgemeine symmetrische Determinante in sich überführen, und daraus folgt dann, daß alle Invarianten einer quadratischen Form charakteristische Invarianten sind.

[6]) Die Determinanten der in dieser Arbeit vorkommenden Substitutionen werden als von Null verschieden vorausgesetzt.

Veränderliche $y_1, \ldots, y_n$ die Transformation $\bar{y} = g(y)$ an, so erfahren die Potenzprodukte k-ter Dimension $y_1^{\gamma_1} \ldots y_n^{\gamma_n}$, $(\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = k)$, die Transformation G; man nennt daher G die k-te Potenztransformation von g. Durchläuft g die allgemeine projektive Gruppe, so durchläuft G eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die vielfach als die Fundamentalgruppe der Form $f(A, x)$ bezeichnet wird. Eine Invariante der Form (1) ist somit eine Funktion $I(A)$, für die gilt

$$I(\bar{A}) = \text{const. } I(A), \tag{3}$$

wobei $\bar{A} = G(A)$ und $G \subset \mathfrak{G}$. Die Substitutionen P, die $I(A)$ invariant lassen, für die also (3) gilt, wenn $\bar{A} = P(A)$, bilden eine Gruppe $\mathfrak{P}$, da ja das Produkt aus zwei solchen Substitutionen auch diese Eigenschaft besitzt. Die Frage, ob $I(A)$ eine charakteristische Invariante ist oder nicht, ist nun gleichbedeutend mit der Frage, ob $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{P}$ übereinstimmt, oder ob $\mathfrak{G}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{P}$ ist.

Die Relation (3), die eine Identität in den A darstellt, gilt auch dann, wenn wir den A gewisse Bedingungen auferlegen. Wir denken uns die A auf folgende Weise spezialisiert[7]): $a_1, \ldots, a_n$ seien n beliebige Veränderliche und die A seien so gewählt, daß

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Koeffizienten A, die einer solchen Bedingung genügen, wollen wir kurz „spezialisierte“ A nennen. Setzt man die a in $I(A)$ ein, so erhält man eine Funktion der a

$$I(A) = i(a_1, \ldots, a_n)$$

und nach (3)

$$I(\bar{A}) = \text{const. } i(a_1, \ldots, a_n).$$

Es ist aber keineswegs gesagt, daß die in der letzten Gleichung auftretenden $\bar{A}$ ebenfalls spezialisiert sind, daß es also Funktionen $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ der $a_1, \ldots, a_n$ gibt, so daß

$$\bar{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n} = \bar{a}_1^{\beta_1} \ldots \bar{a}_n^{\beta_n}. \tag{4}$$

Es wird vielmehr später untersucht werden, wann spezialisierte A in spezialisierte $\bar{A}$ übergehen. Vorläufig werde folgender Satz bewiesen.

Satz I. *Führt eine Transformation P spezialisierte A in spezialisierte $\bar{A}$ über, dann gehört P zur Gruppe $\mathfrak{G}$.*

Beweis: Die $\bar{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n}$, die Formen k-ten Grades in den $a_1, \ldots, a_n$ sind, müssen wegen des Nichtverschwindens der Determinante von P linear unabhängig sein in den A und damit auch in den a. Man setze

$$\bar{A}_{k-\nu, \nu, 0, \ldots, 0} = \Phi_\nu, \qquad (\nu = 0, \ldots, k)$$

---

[7]) Für den binären Fall wendet eine solche Spezialisierung bereits Herr Ostrowski an, a. a. O. [5]).

und da nach Voraussetzung die Beziehung (4) besteht, wird

$$\Phi_\nu = \bar{a}_1^{k-\nu}\, \bar{a}_2^{\nu}.$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} = \frac{\Phi_{\nu+1}}{\Phi_\nu} = \frac{g}{h},$$

wo g und h ganze rationale Funktionen desselben Grades in den a sind, die keinen gemeinsamen irreduziblen Faktor besitzen. Also ist

$$\Phi_k\, h^k = \Phi_0\, g^k;$$

da h zu g teilerfremd ist, muß Φ_0 durch h^k teilbar sein, und da Φ_0 k-ten Grades in den a ist, kann der Grad von h höchstens 1 sein; wäre er gleich Null, so wäre auch g konstant und Φ_0 und Φ_k linear abhängig, was nicht eintreten darf. Folglich gilt $\bar{a}_1^k = \Phi_0 = \text{const.}\ h^k$ mit linearem homogenem h. Also ist auch $\bar{a}_1$ und analog $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ linear und homogen in den a, und diese Funktionen sind linear unabhängig, da sonst auch die $\bar{A}$ linear abhängig wären. Also ist P die k-te Potenztransformation derjenigen linearen homogenen Transformation, die a in $\bar{a}$ überführt und gehört somit zu $\mathfrak{G}$.

Aus Satz I folgt unmittelbar

Satz Ia. *Führt jede $I(A)$ invariant lassende Transformation spezialisierte A in spezialisierte $\bar{A}$ über, so ist $I(A)$ eine charakteristische Invariante.*

Satz Ia gestattet bereits die Untersuchung der Invariante

$$I(A) = A_0 A_2 - A_1^2$$

der binären quadratischen Form

$$f(A, x) = A_0 x^2 + 2 A_1 x y + A_2 y^2.$$

Für $A_0 = a_1^2$, $A_1 = a_1 a_2$, $A_2 = a_2^2$ wird $I(A) = 0$, also auch $I(\bar{A}) = 0$. Wählt man $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ so, daß $\bar{a}_1^2 = \bar{A}_0$ und $\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{A}_1$, dann folgt aus $\bar{A}_0 \bar{A}_2 - \bar{A}_1^2 = 0$, daß $\bar{A}_2 = \bar{a}_2^2$; die $\bar{A}$ sind also spezialisiert. $I(A)$ somit charakteristische Invariante [8]).

Bei Spezialisierung der A wird — wie weiter gezeigt wird — auch in allen anderen Fällen $I(A)$ verschwinden, aber aus der Gleichung $I(\bar{A}) = 0$ allein wird man — abgesehen vom eben behandelten Fall — noch nicht schließen können, daß die $\bar{A}$ spezialisiert sind. Es wird sich aber ergeben, daß bei Spezialisierung der A gewisse Ableitungen von $I(A)$ nach den A verschwinden, und damit lassen sich weitergehende Resultate erreichen.

---

[8]) Dieses Resultat ist bereits in den Ergebnissen der unter [3]) und [5]) zitierten Arbeiten inbegriffen.

§ 2.

Die Koeffizienten von (1) mögen nun mit fortlaufenden Indizes — etwa in lexikographischer Anordnung — versehen werden: $A_1, \ldots, A_N$. $I(A)$ sei vom Grade r[9]). Durch $(r-1)$-faches Anwenden des Aronholdschen Prozesses gewinnen wir aus $I(A)$ eine Simultaninvariante

$$(5) \qquad J(A, B, \ldots, H) = \sum_{\varkappa, \lambda, \ldots, \sigma}^{N} \frac{\partial^{r-1} I(A)}{\partial A_\varkappa \partial A_\lambda \ldots \partial A_\sigma} B_\varkappa \ldots H_\sigma$$

der Formen $f(A, x)$, $f(B, x)$, $\ldots$, $f(H, x)$, wo $f(B, x)$, $\ldots$, $f(H, x)$ ebenso wie $f(A, x)$ n-äre Formen k-ten Grades sind, die statt

$$A_1, \ldots, A_N$$

als Koeffizienten

$$\begin{matrix} B_1, \ldots, B_N, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H_1, \ldots, H_N \end{matrix}$$

enthalten. Spezialisiert man neben den A auch die $B, \ldots, H$ durch Einführung von Größen

$$\begin{matrix} b_1, \ldots, b_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_1, \ldots, h_n, \end{matrix}$$

so wird

$$J(A\ B \quad \ldots, H) = j(a, b, \ldots, h)$$

eine Simultaninvariante der r Linearformen

$$\begin{matrix} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \\ b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_1 x_1 + \ldots + h_n x_n \end{matrix}$$

und somit nach einem bekannten Hauptsatz der Invariantentheorie[10]) eine ganze rationale Funktion der Determinanten Δ_λ, die aus den Koeffizienten von je n Linearformen gebildet sind:

$$j(a, b, \ldots, h) = F(\Delta_1, \ldots, \Delta_l).$$

Sicher wird $j(a, b, \ldots, h) = 0$, wenn man darin alle Veränderlichenreihen einander gleichsetzt, also wenn $a_\nu = b_\nu = \ldots = h_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$; wäre $j(a, b, \ldots, h) \neq 0$ bei Gleichsetzen der q ersten Veränderlichenreihen, so enthielte $F(\Delta_1, \ldots, \Delta_l)$ mindestens ein Determinantenprodukt Q, in dem keine Determinante vorkommt, die zwei der gleichgesetzten Veränderlichenreihen enthält; da aber $j(a, b, \ldots, h)$ und ebenso Q in jeder der Veränderlichenreihen $a, b, \ldots, h$ vom Grade k ist, so müßten in Q

[9]) Wir nehmen $r > 1$ an, da für $n > 1$ stets $n \leqq r$ ist und der Fall $n = 1$ trivial ist.

[10]) Vgl. etwa Weitzenböck: Invariantentheorie (Groningen 1923), S. 18.

mindestens $q \cdot k$ Determinanten vorkommen. Der Gesamtgrad von $j(a, b, \ldots, h)$ ist $k \cdot r$, also müßte $q \cdot k \cdot n \leqq k \cdot r$ sein. Setzt man aber $\left[\frac{r}{n}\right] + 1$ oder mehr — etwa q_0 — Veränderlichenreihen einander gleich, dann wird

$$j(\underbrace{a, \ldots, a}_{q_0}, e, \ldots, h) = 0$$

und für spezialisierte $A, \ldots, H$ auch

$$J(\underbrace{A, \ldots, A}_{q_0}, E, \ldots, H) = 0$$

und aus (5) folgt durch mehrmaliges Anwenden der Eulerschen Formel für homogene Funktionen

$$\sum_{\mu, \ldots, \sigma}^{1 \ldots N} \frac{\partial^{r - q_0} I(A)}{\partial A_\mu \ldots \partial A_\sigma} E_\mu \ldots H_\sigma = 0.$$

Da auch die spezialisierten $E, \ldots, H$ linear unabhängig sind, folgt

Satz II. *Für spezialisierte A verschwinden alle partiellen Ableitungen von $I(A)$ nach den A bis zur Ordnung $r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right]$.*

§ 3.

Von der linearen homogenen Transformation $A^* = M(A)$ sei bekannt, daß sie die Invariante $I(A)$ in eine Invariante $J(A)$ überführt: $I(A^*) = J(A)$. Die partiellen Ableitungen von $I(A^*)$ nach den A^* drücken sich linear aus durch die Ableitungen gleicher Ordnung von $J(A)$ nach den A, und da $J(A)$ ebenso wie $I(A)$ den Grad r hat, so verschwinden nach Satz II die Ableitungen von $J(A)$ nach den A und damit die von $I(A^*)$ nach den A^* bis zur Ordnung $r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right]$. Genügen den Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{\partial^\varrho I(A)}{\partial A_\varkappa \partial A_\lambda \ldots} = 0, \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right]$$

nur spezialisierte A, so sind auch die A^* spezialisiert, die aus spezialisierten A durch M hervorgegangen sind[11]), und M gehört nach Satz I zur Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; daß jede Transformation, die $I(A)$ wieder in eine Invariante überführt, zu $\mathfrak{G}$ gehört, ist aber hinreichend dafür, daß $I(A)$ eine charakteristische Invariante ist.

[11]) Da die A^* ganze rationale homogene, linear unabhängige Funktionen k-ten Grades der a sind, braucht man nur zu zeigen, daß Funktionen *dieser Art* von n Veränderlichen spezialisiert sein müssen, wenn sie (6) identisch erfüllen.

Satz III. *Eine Invariante $I(A)$ ist eine charakteristische Invariante, wenn die zugehörigen Gleichungen* (6) *nur von spezialisierten A erfüllt werden.*

Zusatz. *Sind sämtliche Lösungen von* (6) *spezialisiert und ist von einer linearen homogenen Transformation M nur bekannt, daß sie $I(A)$ in eine Invariante überführt, so gehört M zu $\mathfrak{G}$.*

§ 4.

Eine für die Behandlung konkreter Beispiele wichtige Erweiterung von Satz III gewinnt man, wenn man von der bekannten Tatsache Gebrauch macht, daß jeder irreduzible Faktor einer Invariante der Form (1) selbst eine Invariante von (1) ist, was man auf folgende Art beweisen kann:

$$I(A) = J_1^{\gamma_1}(A) \ \ldots \ J_m^{\gamma_m}(A)$$

sei eine Zerlegung von $I(A)$ in Potenzen von untereinander verschiedenen irreduziblen Faktoren. Eine Transformation $\bar{A} = G(A)$ aus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ liefert

$$I(\bar{A}) = J_1^{\gamma_1}(\bar{A}) \ \ldots \ J_m^{\gamma_m}(\bar{A}) = \text{const}\, J_1^{\gamma_1}(A) \ \ldots \ J_m^{\gamma_m}(A),$$

und da $J_\mu(\bar{A})$ auch in den A irreduzibel ist, wird

$$J_1(\bar{A}) = c_1 J_{\alpha_1}(A), \ \ldots, \ J_m(\bar{A}) = c_m J_{\alpha_m}(A).$$

Die Transformation G^l läßt also, wenn $l = m!$ ist, jedes einzelne J_u fest. Da die Gruppe aller linearen homogenen Transformationen in n Veränderlichen erzeugt wird von den Transformationen

$$\bar{x}_\nu = c \cdot x_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und

$$\bar{x}_\varkappa = x_\varkappa + t_\lambda x_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n),$$

so ist jede erzeugende Substitution als l-te Potenz — nämlich von $\bar{x}_\nu = \sqrt[l]{c} \cdot x_\nu$ bzw. von $\bar{x}_\nu = x_\varkappa + \frac{t_\lambda}{l} x_\lambda$ — darstellbar, und somit ist jede $\mathfrak{G}$ erzeugende Transformation die l-te Potenz eines Elements von $\mathfrak{G}$; also bleibt jedes J_μ bei jeder $\mathfrak{G}$ erzeugenden Transformation fest und ist daher Invariante von (1).

Läßt $A^* = P(A)\ I(A)$ invariant, so können dabei die irreduziblen Faktoren nur permutiert werden; da diese aber selbst Invarianten sind, so muß nach dem Zusatz zum Satz III P zu $\mathfrak{G}$ gehören, wenn für jeden irreduziblen Faktor die zugehörigen Gleichungen (6) nur spezialisierte Lösungen haben.

Satz IV. *Eine Invariante $I(A)$ ist eine charakteristische Invariante, wenn für jeden irreduziblen Faktor die zugehörigen Gleichungen* (6) *nur von spezialisierten A erfüllt werden.*

Handelt es sich also darum, für eine gegebene Form nachzuweisen, daß alle ihre Invarianten charakteristische sind, so genügt es, unsere Methode nur auf die irreduziblen Invarianten dieser Form anzuwenden.

II. Anwendung der hinreichenden Bedingungen auf die Invarianten der ternären kubischen Form.

§ 1.

Jetzt sollen die Invarianten der ternären kubischen Form

$$(7) \qquad f(A, x) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3} \frac{3!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!} A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$$

untersucht werden. (7) besitzt bekanntlich eine Invariante S vom Grade 4 und eine Invariante T vom Grade 6, und jede andere Invariante von (7) ist eine ganze rationale Funktion von S und T[12]). Da $I(A)$ homogen in den A sein muß, wird

$$I(A) = S^{\varkappa} T^{\lambda} \cdot \sum_{\mu=0}^{m} \varrho_\mu S^{3(m-\mu)} T^{2\mu}, \quad (\varrho_0 \neq 0,\ \varrho_m \neq 0)$$

wobei die ϱ_μ Konstanten sind. Die Summe läßt sich darstellen als Produkt von Funktionen der Gestalt $U_\nu = S^3 + c_\nu T^2$; die U_ν sind, falls $c_\nu \neq 0$, irreduzible Funktionen der A, da sonst jeder ihrer irreduziblen Faktoren selbst Invariante sein müßte. Nach Satz IV können wir uns auf die Untersuchung der Invarianten S, T und $U = S^3 + c\,T^2$ — mit $c \neq 0$ — beschränken.

Die Invarianten S und T sind in symbolischer Schreibweise:

$$S = (a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)$$
$$T = (a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,e)\,(b\,c\,f)\,(d\,e\,f)^2.$$

Explizit ergeben sich sehr komplizierte Ausdrücke in den A; wir werden hier nur eine kleine Anzahl von Ableitungen von S und T heranziehen, ohne S und T selbst anzuschreiben. Wir ordnen (7) nach Potenzen von z und führen eine neue Bezeichnung der Koeffizienten ein:

$$\begin{aligned} f(A, x) = {} & z^3 \alpha \\ & + 3 z^2 (\beta_0 x + \beta_1 y) \\ & + 3 z (\gamma_0 x^2 + 2 \gamma_1 x y + \gamma_2 y^2) \\ & + \delta_0 x^3 + 3 \delta_1 x^2 y + 3 \delta_2 x y^2 + \delta_3 y^3. \end{aligned}$$

---

[12]) Ein Beweis hierfür findet sich bei Sylvester: Collected math. Papers, Vol. I, S. 599—608.

Dabei ist:

$$\alpha = A_{003};$$
$$\beta_\varkappa = A_{1\,\varkappa,\varkappa,2}, \qquad \varkappa = 0,\ 1;$$
$$\gamma_\lambda = A_{2\,\lambda,\lambda,1}, \qquad \lambda = 0,\ 1,\ 2;$$
$$\delta_\mu = A_{3\,\mu,\mu,0}, \qquad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Eine Invariante $I(A)$ von $f(A, x)$ sei nach Potenzen von α angeordnet, etwa

$$I(A) = \sum_i \alpha^i \varphi_i(\beta, \gamma, \delta).$$

Wendet man auf die Veränderlichen von (7) eine Transformation an, die z nicht ändert, so bleibt auch z ungeändert, und daraus folgt, daß jedes $\varphi_i(\beta, \gamma, \delta)$ eine Simultaninvariante der binären Formen

$$\begin{aligned} &\beta_0 x + \beta_1 y, \\ &\gamma_0 x^2 + 2\gamma_1 xy + \gamma_2 y^2, \\ &\delta_0 x^3 + 3\delta_1 x^2 y + 3\delta_2 x y^2 + \delta_3 y^3 \end{aligned} \tag{8}$$

ist und zwar vom gleichen Gewicht wie $I(A)$ selbst. Eine zyklische Vertauschung der Veränderlichen von (7) ruft eine Permutation der Koeffizienten hervor, die in Zyklen geschrieben folgende Gestalt hat:

$$(\delta_3, \delta_0, \alpha)(\delta_2, \gamma_0, \beta_1)(\delta_1, \beta_0, \gamma_2)(\gamma_1). \tag{9}$$

Also bleibt $I(A)$ bei dieser Permutation ungeändert. Daraus folgt zunächst, daß α in $I(A)$ vorkommen muß; denn sonst könnte auch δ_0 und δ_3 nicht in $I(A)$ vorkommen. Da aber, falls α nicht auftreten würde, $I(A) = \varphi_0(\beta, \gamma, \delta)$ wäre, so müßte es als Simultaninvariante der Formen (8) den Cayley Aronholdschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} D\varphi &= \sum_{\mu=1}^{3} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_\mu} \delta_{\mu-1} + \sum_{\mu=1}^{2} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_\mu} \gamma_{\mu-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} \beta_0 = 0 \\ 1\varphi &= \sum_{\mu=0}^{2} (3-\mu) \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_\mu} \delta_{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{1} (2-\mu) \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_\mu} \gamma_{\mu+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_0} \beta_1 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

genügen, und daraus folgt, daß auch δ_1 und δ_2 in $\varphi_0(\beta, \gamma, \delta)$ nicht auftreten können, wenn δ_0 und δ_3 nicht darin vorkommen. Wegen der Vertauschbarkeit (9) könnten dann auch $\gamma_0, \gamma_2, \beta_0, \beta_1$ nicht in φ_0 vor; $I(A)$ könnte dann nur noch von γ_1 allein abhängen, was wiederum mit den Cayley Aronholdschen Differentialgleichungen (10) unvereinbar wäre. Also muß α in $I(A)$ vorkommen. Da die Invariante S vom Gewicht 4 und T vom Gewicht 6 ist, so kann δ_3 und gemäß (9) auch α in S höchstens in der 1. Potenz und in T höchstens in der 2. Potenz auftreten; also kommt α in S genau in der 1. Potenz und in T in der 1. oder 2. Potenz vor.

Wir können also setzen: $S = \alpha\,\varphi_1 + \varphi_0$. Dabei ist φ_1 eine Simultaninvariante der Formen (8) vom Gesamtgrad 3 und vom Gewicht 4; wir denken uns φ_1 als Summe von Simultaninvarianten geschrieben, die in den Koeffizienten einer jeden der drei Formen (8) homogen sind und bezeichnen den Einzelgrad eines solchen eigentlich homogenen Summanden in den β mit r_1, in den γ mit r_2, in den δ mit r_3. Dann bestehen folgende Bedingungen:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 3,$$
$$r_1 + 2\,r_2 + 3\,r_3 = 8.$$

Hierfür gibt es nur eine Lösung:

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 2.$$

Also ist φ_1 eigentlich homogen; setzt man eine Funktion vom Grade 1 in den γ und vom Grade 2 in den δ und vom Gewichte 4 mit unbestimmten Koeffizienten an, so findet man mit Hilfe der Cayley-Aronholdschen Differentialgleichungen (10), daß es bis auf einen konstanten Faktor nur eine Invariante dieser Art gibt. Es ist

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \varphi_1 = k_1 \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix}, \qquad k_1 = \text{const} \neq 0.$$

Die Invariante T ist von der Gestalt: $T = \alpha^2\,\psi_2 - \alpha\,\psi_1 + \psi_0$, wobei noch nicht feststeht, ob nicht eine der Funktionen ψ_2 und ψ_1 identisch verschwindet. Ehe wir dies entscheiden, untersuchen wir, welche Funktionen für ψ_2 und ψ_1 überhaupt in Frage kommen. ψ_2 müßte vom Gesamtgrad 4 und vom Gewicht 6 sein. Für jeden eigentlich homogenen Bestandteil gilt also:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4;$$
$$r_1 + 2\,r_2 + 3\,r_3 = 12.$$

Einzige Lösung ist:

$$r_1 = r_2 = 0; \quad r_3 = 4.$$

Die Simultaninvariante ψ_1 müßte vom Gesamtgrad 5 und vom Gewicht 6 sein. Die Bedingungen:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 5;$$
$$r_1 + 2\,r_2 + 3\,r_3 = 12,$$

denen jeder eigentlich homogene Bestandteil von ψ_1 genügen müßte, besitzen zwei Lösungen:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 3$$

und

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 3; \quad r_3 = 2.$$

Würde nun α in T nur in der 1. Potenz auftreten, so käme – da T die Permutation (9) zuläßt – δ_0 und δ_3 in ψ_1 und ψ_0 nur in der 1. Potenz vor. Eine einfache Folgerung aus (10) besagt, daß als Faktor der

höchsten vorkommenden Potenz von δ_μ weder $\delta_{\mu+1}$ noch $\delta_{\mu-1}$ auftreten kann. T dürfte demnach kein Potenzprodukt enthalten, in dem $\delta_0\,\delta_1$ oder $\delta_2\,\delta_3$ auftritt, und gemäß (9) auch keines mit $\alpha\,\beta_0$ oder $\alpha\,\beta_1$. Die Simultaninvariante mit $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$ könnte somit nicht Bestandteil von ψ_1 sein. Da aber α doch in T vorkommen muß, so müßte ψ_1 gleich einer Invariante mit $r_1 = 0$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$ sein, die aber kein Potenzprodukt mit δ_0^2, $\delta_0\,\delta_1$, $\delta_2\,\delta_3$, δ_3^2 enthalten dürfte. Eine Invariante, die alle diese Bedingungen erfüllt, gibt es aber nicht, wie man durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten mittels (10) nachweist. Die Annahme, daß α in T nur in der 1. Potenz auftritt, führte zum Widerspruch; also muß α in T vorkommen. Für ψ_2 erhielten wir $r_3 = 4$, und von dieser Art gibt es bis auf einen konstanten Faktor nur eine Invariante, die Diskriminante der binären kubischen Form. Also wird

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = \psi_2 = k_2\,(\delta_0^3\,\delta_3^2 - 6\,\delta_0\,\delta_1\,\delta_2\,\delta_3 - \delta_1^3\,\delta_3 + 2\,\delta_1^2\,\delta_2^2 - \delta_2^3\,\delta_0),$$

$$k_2 = \text{const} \neq 0.$$

Folglich enthält T das Potenzprodukt $\alpha^2\,\delta_0\,\delta_1\,\delta_2\,\delta_3$ und wegen (9) auch $\alpha\,\beta_0\,\gamma_0\,\delta_0\,\delta_3^2$ und $\alpha\,\beta_1\,\gamma_2\,\delta_0^2\,\delta_3$. Also muß eine Simultaninvariante mit $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$ in ψ_1 auftreten. Die Ableitung dieser Invariante nach β_1 nennen wir η; da die nicht berücksichtigten Glieder von ψ_1 sowie ψ_2 die Größe β_1 nicht enthalten, ist

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha\,\partial \beta_1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1}.$$

Wir setzen

$$\psi_1 = \beta_1\,\eta + \psi^*,$$

also

$$T = \alpha^2\,\psi_2 + \alpha\,\beta_1\,\eta + \alpha\,\psi^* + \psi_0.$$

Für die weiteren Untersuchungen genügt es, nur η auszurechnen; mit Hilfe von (10) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\eta = k_3\,(&\gamma_0\,(\delta_0\,\delta_2\,\delta_3 - 2\,\delta_1^2\,\delta_3 + \delta_1\,\delta_2^2)\\ &+ 2\,\gamma_1\,(\delta_0\,\delta_1\,\delta_3 - 2\,\delta_0\,\delta_2^2 + \delta_1^2\,\delta_2)\\ &+ \gamma_2\,(-\delta_0^2\,\delta_3 + 3\,\delta_0\,\delta_1\,\delta_2 - 2\,\delta_1^3)),\qquad k_3 = \text{const} \neq 0.\end{aligned}$$

§ 2.

Ehe wir Satz IV auf die Invarianten S, T und U anwenden, schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Die Koeffizienten von* (7) *sind spezialisiert, wenn zwischen ihnen folgende Bedingungen bestehen:*

(a) $$\frac{A_{300}}{A_{210}} = \frac{A_{210}}{A_{120}} = \frac{A_{120}}{A_{030}},$$

(b) $$A_{201}\,A_{120} - 2\,A_{111}\,A_{210} + A_{300}\,A_{021} = 0.$$

Beweis. Wir setzen a_2 gleich einer der drei dritten Wurzeln von A_{030} und wählen a_1 so, daß

$$\frac{A_{120}}{A_{030}} = \frac{a_1}{a_2}$$

wird. Dann ist

$$A_{\varkappa, 3-\varkappa, 0} = a_1^{\varkappa} \cdot a_2^{3-\varkappa}, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, 3 \tag{11}$$

und insbesondere

$$A_{300} = a_1^3.$$

Nun sei a_3 so gewählt, daß

$$\frac{A_{201}}{A_{300}} = \frac{a_3}{a_1}$$

wird, und da aus (a) wegen der Vertauschbarkeit (9) folgt, daß auch

$$\frac{A_{003}}{A_{102}} = \frac{A_{102}}{A_{201}} = \frac{A_{201}}{A_{300}}$$

ist, so wird

$$A_{3-\varkappa, 0, \varkappa} = a_1^{3-\varkappa} \cdot a_3^{\varkappa}, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, 3 \tag{12}$$

und insbesondere

$$A_{003} = a_3^3.$$

Aus (a) folgt noch gemäß (9), daß auch

$$\frac{A_{030}}{A_{021}} = \frac{A_{021}}{A_{012}} = \frac{A_{012}}{A_{003}}$$

ist, und da $A_{030} = a_2^3$, $A_{003} = a_3^3$ ist, folgt, daß

$$\frac{A_{012}}{A_{003}} = \varepsilon \cdot \frac{a_2}{a_3}$$

gesetzt werden kann, wobei ε eine dritte Einheitswurzel ist. Somit wird

$$A_{0, \varkappa, 3-\varkappa} = \varepsilon^{\varkappa} a_2^{\varkappa} a_3^{3-\varkappa}. \tag{13}$$

Setzt man (11), (12), (13) in (b) ein, so wird

$$a_1^2 a_3 \cdot a_1 a_2^2 - 2 A_{111} \cdot a_1^2 a_2 + a_1^3 \cdot \varepsilon^2 \cdot a_2^2 a_3 = 0,$$

$$A_{111} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon^2). \tag{14}$$

Die Permutation (9) auf (b) angewandt liefert

$$A_{012} A_{201} - 2 A_{111} A_{102} + A_{003} A_{210} = 0$$

und unter Berücksichtigung von (11), (12), (13)

$$\varepsilon \cdot a_2 a_3^2 \cdot a_1^2 a_3 - 2 A_{111} \cdot a_1 a_3^2 + a_3^3 \cdot a_1^2 a_2 = 0$$

$$A_{111} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \tfrac{1}{2} (\varepsilon + 1). \tag{15}$$

Vergleicht man (14) und (15), so folgt, daß die dritte Einheitswurzel ε nur $+1$ sein kann. Die A sind also spezialisiert.

§ 3.

Nun muß nur noch gezeigt werden, daß aus dem Nullsetzen der Ableitungen von S, T und U bis zur Ordnung $r-1-\left[\frac{r}{n}\right]$ die Bedingungen (a) und (b) folgen. Bei $S=\alpha\varphi_1+\varphi_0$ (vgl. S. 10), wo $r=4$ ist, können wir die Ableitungen bis zur Ordnung 2 gleich Null setzen; Bedingung (a) ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_\nu}=0, \quad \nu=0,1,2.$$

Aus $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta_0}=0$ folgt

$$\gamma_1\delta_3-\gamma_2\delta_2=0$$

und aus $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta_3}=0$ folgt

$$\gamma_0\delta_1-\gamma_1\delta_0=0$$

und hieraus ergeben sich, wenn man (a) heranzieht, die beiden Gleichungen

$$\gamma_1\delta_1-\gamma_2\delta_0=0$$

und

$$\gamma_0\delta_2-\gamma_1\delta_1=0,$$

aus denen man (b) durch Subtraktion erhält.

Bei $T=\alpha^2\psi_2+\alpha\beta_1\eta+\alpha\psi^*+\psi_0$ (vgl. S. 11), wo $r=6$ ist, kann man die Ableitungen bis zur Ordnung $r-1-\left[\frac{r}{n}\right]=3$ gleich Null setzen. Da $\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha\,\partial\beta_1}=\eta$, kann man alle ersten Ableitungen von η heranziehen. Da

$$\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_0}=\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_1}=0$$

und somit auch

$$\delta_0\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_0}+\frac{1}{2}\delta_1\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_1}=0,$$

folgt

$$(\delta_0\delta_2-\delta_1^2)(\delta_0\delta_3-\delta_1\delta_2)=0$$

und aus $\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_2}=0$ folgt

$$2\delta_1(\delta_0\delta_2-\delta_1^2)-\delta_0(\delta_0\delta_3-\delta_1\delta_2)=0,$$

so daß die beiden Klammern verschwinden müssen, was mit (a) gleichbedeutend ist. Die Gleichung $\frac{\partial\eta}{\partial\delta_3}=0$ liefert

$$\gamma_0\delta_0\delta_2-2\gamma_0\delta_1^2+2\gamma_1\delta_0\delta_1-\gamma_2\delta_0^2=0$$

und bei Benutzung von (a) erhält man daraus (b):

$$\gamma_0\delta_2-2\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_0=0.$$

Die Invariante

$$U = S^3 + c\,T^2 = (\alpha\,\varphi_1 + \varphi_0)^3 + c\,(\alpha^2\,\psi_2 + \alpha\,\beta_1\,\eta + \alpha\,\psi^* + \psi_0)^2$$
$$= \alpha^4 \cdot c\,\psi_2^2 + \alpha^3\,(\varphi_1^3 + 2\,c\,\beta_1\,\psi_2\,\eta + 2\,c\,\psi_2\,\psi^*) + \alpha^2\,(\ldots) + \ldots$$

ist vom Grade 12; man kann also hier die Ableitungen bis zur Ordnung $r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right] = 7$ gleich Null setzen. Da $\frac{\partial^4 T}{\partial\,\alpha^4} = 24\,c\,\psi_2^2$, folgt, daß ψ_2 nebst seinen ersten Ableitungen gleich Null gesetzt werden darf; dagegen ist aber

$$\frac{\partial^2\,\psi_2}{\partial\,\delta_3^2} = 2\,k_2\,\delta_0^3 \neq 0.$$

Berücksichtigt man diese Ergebnisse, wenn man $\frac{\partial^4 T}{\partial\,\alpha^3\,\partial\,\beta_1} = 12\,c\,\psi_2\,\eta$ noch zweimal nach δ_3 und dann noch einmal nach γ_ν oder δ_ν differenziert, so sieht man, daß alle ersten Ableitungen von η gleich Null gesetzt werden dürfen, und daraus haben wir bereits bei der Untersuchung von T geschlossen, daß (a) und (b) erfüllt sind.

Damit ist also gezeigt, daß die zu jedem irreduziblen Faktor einer Invariante der ternären kubischen Form gehörigen Gleichungen (6) nur durch spezialisierte A erfüllt werden. Aus Satz IV folgt also

Satz V. *Jede Invariante der ternären kubischen Form ist eine charakteristische Invariante.*

Lebenslauf

Am 18. Juni 1909 bin ich, Feodor Theilheimer, als Sohn des Kaufmanns Gustav Theilheimer in Gunzenhausen (Bayern) geboren. Von 1915 bis 1919 besuchte ich dort die jüdische Volksschule, von 1919 bis 1925 die Realschule und von 1925 bis 1928 die Oberrealschule zu Nürnberg, wo ich zu Ostern 1928 die Reifeprüfung ablegte. Nach dem Abitur studierte ich zwei Semester Mathematik und Physik an der Universität Erlangen. In den Jahren 1929 bis 1931 widmete ich mich rabbinischen Studien. Im Oktober 1931 ließ ich mich an der Berliner Universität immatrikulieren und studierte hier seitdem Mathematik und Physik. Allen meinen Lehrern bin ich zu großem Dank verpflichtet, besonders Herrn Professor I. Schur und Herrn Professor E. Schmidt.

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn A. G., Braunschweig
Printed in Germany